Serie di potenze in $\mathbb{C}$

Limite superiore di una successione in $\mathbb{R}$

Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$ ($a_n \in \mathbb{R}$) e definiamo gli insiemi dei valori della successione "a partire da n" e i loro estremi superiori:

$$A_n = \{a_k \,|\, k \geq n\} = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}, \qquad \bar{a}_n = \sup A_n \,. \tag{1}$$

Si osservi che se la successione è limitata, tutti gli $\bar{a}_n$ sono numeri reali, mentre se la successione non è limitata superiormente, $\bar{a}_n = +\infty$ per ogni n; nel primo caso, poiché $A_{n+1} \subseteq A_n$, si ha che $\bar{a}_{n+1} \leq \bar{a}_n$ ossia *i numeri $\bar{a}_n$ formano una successione decrescente* e quindi esiste il limite $\lim \bar{a}_n \in [-\infty, +\infty)$ che coincide con $\inf \bar{a}_n$. In vista di queste osservazioni, diamo la seguente

Definizione 1 *Data una successione $\{a_n\}$, e definiti A_n e $\bar{a}_n$ come in* (1)*, chiamiamo "limite superiore" (o limsup, o massimo limite) di $\{a_n\}$ l'elemento di $\mathbb{R}^*$ dato da:*

$$\limsup a_n = \overline{\lim}\, a_n := \begin{cases} +\infty\,, & \text{se } \bar{a}_1 = +\infty\,; \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \bar{a}_n = \inf\{\bar{a}_n \,|\, n \geq 1\}\,, & \text{se } \bar{a}_1 < +\infty\,. \end{cases} \tag{2}$$

Osservazione 2 (i) Il limite superiore di una successione (al contrario del limite) esiste sempre (in $\mathbb{R}^*$), ed inoltre, se $\{a_n\}$ è regolare, allora[1] $\overline{\lim}\, a_n = \lim a_n$. Quindi, il concetto di limite superiore è una generalizzazione del concetto di limite.
(ii) Il limite superiore di una successione può essere $-\infty$: ad esempio, se $a_n = -n$, $\bar{a}_n = a_n \to -\infty$ e dunque $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$.

Le proprietà del limite superiore che ci serviranno qui sono raccolte nel seguente

Lemma 3 *Sia $\{a_n\}$ una successione e $M = \overline{\lim}\, a_n$ il suo limite superiore. Allora,*
(i) *se $M < +\infty$, per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists\, N$ tale che $a_n < M + \varepsilon$ per ogni $n \geq N$;*
(ii) *per ogni $\alpha < M$ e per ogni N esiste $n \geq N$ tale che $a_n > \alpha$.*
(iii) *Se $a_n \geq 0$ e $b_n \to \lambda \in (0, +\infty)$, allora $\overline{\lim}(b_n a_n) = \lambda\, \overline{\lim}\, a_n$.*

Dimostrazione (i) Dalla caratterizzazione di estremo inferiore segue che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste N tale che $\bar{a}_N < M + \varepsilon$; quindi, per definizione di $\bar{a}_N$ segue che $a_n \leq \bar{a}_N < M + \varepsilon$ per ogni $n \geq N$.
(ii) Sia $\alpha < M$ e sia $V = (\alpha, +\infty)$. V è un intorno di M e dunque, dalla definizione di limite, poiché $\bar{a}_n \to M$, esiste N_0 tale che $\bar{a}_m \in V$ (ossia $\bar{a}_m > \alpha$) per ogni $m \geq N_0$. Fissiamo $m > \max\{N, N_0\}$. Dalla definizione di $\bar{a}_m$ (e la caratterizzazione di estremo superiore) segue che esiste $n \geq m \geq N$ tale che $a_n > \alpha$.
(iii) Facciamo due osservazioni preliminari. Dalla definizione di estremo superiore segue facilmente[2] che se A è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e $c > 0$, allora $\sup(cA) = c \sup A$; dunque $\sup(cA_n) = c\bar{a}_n$, il che implica che $\overline{\lim}(ca_n) = c\, \overline{\lim}\, a_n$. Si noti poi che se $a_n \leq a'_n$

[1] Esercizio 3.
[2] Si noti che $cA := \{ca \,|\, a \in A\}$.

per $n \geq N$, chiaramente $\bar{a}_n \leq \bar{a}'_n$ per $n \geq N$, e dunque $\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a'_n$.
Ora, fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia N tale che $(\lambda - \varepsilon) < b_n < (\lambda + \varepsilon)$ per ogni $n \geq N$. Allora, $(\lambda - \varepsilon)a_n \leq b_n a_n \leq (\lambda + \varepsilon)a_n$ per ogni $n \geq N$ e, per le osservazioni appena fatte, $(\lambda - \varepsilon)\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}(b_n a_n) \leq (\lambda + \varepsilon)\overline{\lim}\, a_n$ e per l'arbitrarietà di ε si ha la tesi. ∎

Serie in $\mathbb{C}$

Dati $z_k \in \mathbb{C}$, si dice che **la serie**

$$\sum_{k \geq 0} z_k := \sum_{k=0}^{\infty} z_k$$

converge a $w \in \mathbb{C}$, in formule, $w = \sum_{k=0}^{\infty} z_k$, se

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k = w\,, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \Big| \sum_{k=0}^{n} z_k - w \Big| = 0\,.$$

Si dice che la serie $\sum z_k$ **converge assolutamente**, se converge la serie a termini non negativi $\sum |z_k|$.
(i) Come nel caso reale, vale il "criterio necessario di Cauchy": *se $\sum_{k\geq 0} z_k$ è convergente, allora $z_n \to 0$*, infatti se $s_n := \sum_{k=0}^{n} z_k \to w$, allora

$$z_n = s_n - s_{n-1} \to w - w = 0\,.$$

(ii) Se una serie a termini complessi $z_n = x_n + i y_n$ converge assolutamente, allora convergono assolutamente le serie reali $\sum x_n$ e $\sum y_n$ e quindi converge la serie complessa $\sum z_n$. Inoltre, in tal caso, si ha $\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ e prendendo il limite per $n \to +\infty$, si ha che[3]

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} z_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|\,. \tag{3}$$

Proposizione 4 (Criterio generalizzato della radice) *Sia $\{z_n\}$ una successione di numeri complessi e sia $M := \overline{\lim}\, |z_n|^{1/n}$. Allora la serie $\sum z_n$ converge assolutamente se $M < 1$ e non converge se $M > 1$.*

Dimostrazione Se $M < 1$, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $0 < \theta := M + \varepsilon < 1$. Allora per il punto (i) del lemma segue che esiste N tale che $|z_n|^{1/n} < \theta$ per ogni $n \geq N$. Quindi $|z_n| \leq \theta^n$ e la tesi segue per confronto con la serie geometrica di ragione $0 < \theta < 1$.
Se $M > 1$, sia $1 < \alpha < M$. Dal punto (ii) del lemma segue che esistono infiniti n tali che $|z_n| > \alpha^n$ e quindi la successione z_n non tende a zero e la serie non converge per il criterio necessario di Cauchy. ∎

[3]Si osservi che se $w_n \to w$, dalla disuguaglianza triangolare inversa (Esercizio 1), segue che $\big||w_n| - |w|\big| \leq |w_n - w| \to 0$, ossia, $|w_n| \to |w|$.

Serie di potenze

Considereremo ora serie di potenze sul campo complesso, ossia, serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{4}$$

dove i coefficienti della serie a_n, il centro della serie z_0, e la variabile z sono numeri complessi.

Esempio 5 Sia $z_0 = 0$ e consideriamo le serie di potenze (4) con coefficienti dati da: (i) $a_n = n^n$; (ii) $a_n = 1/n^n$ e (iii) $a_n = 1/n$. Dal criterio della radice applicato a $\sum |a_n||z|^n$ segue che la serie (i) converge solo per $z = 0$; la serie (ii) converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$; la serie (iii) converge assolutamente per $|z| < 1$ e non converge per $|z| > 1$, mentre converge condizionatamente in $x = -1$ (Leibniz) e diverge in $x = 1$.

Formula di Cauchy–Hadamard

Data una serie di potenze (4) *di centro* z_0, *sia*[4]

$$R^{-1} := \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}\,. \tag{5}$$

Allora, la serie (4) *converge assolutamente se*[5] $|x - x_0| < R$ *e non converge se* $|x - x_0| > R$.

Dimostrazione L'idea è di applicare il criterio della radice generalizzato (Proposizione 4) alla serie (4) o, equivalentemente, alla serie numerica $\sum |a_n| r^n$ con $r = |z - z_0| \ge 0$. Sia dunque $r = |z - z_0|$, $M_r := \overline{\lim}(|a_n| r^n)^{1/n}$ e $M := \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n} = R^{-1}$. Per il Lemma 3, $M_r = rM$ e quindi, $M_r < 1 \iff |z - z_0| < R$, e, $M_r > 1 \iff |z - z_0| > R$. La tesi segue quindi dal criterio della radice generalizzato. ∎

Tale $R \in [0, +\infty]$ prende il nome di **raggio di convergenza** della serie (4).

Osservazione 6 (i) Si noti che *il raggio di convergenza* R *è l'unico elemento di* $[0, +\infty]$ *tale che, per ogni* $r < R$, $\sum |a_n| r^n < +\infty$ *e, per ogni* $r > R$, $|a_n| r^n \ge 1$ *per infiniti* n.. Quindi,

$$R = \sup\Big\{r \ge 0 \Big| \sum |a_n| r^n < \infty\Big\}. \tag{6}$$

(ii) **(Criterio del rapporto per serie di potenze)** *Se* $\lim |a_{n+1}/a_n| = s \in [0, +\infty]$, *allora la serie di potenze* $\sum a_n (z - z_0)^n$ *ha raggio di convergenza*[6] $R = s^{-1}$.
Infatti, applicando il criterio del rapporto alla serie $\sum |a_n| r^n$ segue che se $r < s^{-1}$ tale serie converge, mentre se $r > s^{-1}$ la serie non converge (non essendo infinitesima). Ma, per il punto (i), questo significa che $s^{-1} = R$.

Se $R > 0$ è il raggio di convergenza della serie (4) di centro z_0, chiameremo **disco di convergenza** della serie (4), il disco $\{z \,|\, |z - z_0| < R\}$ (per convenzione, tale disco sarà tutto $\mathbb{C}$ se $R = +\infty$).

[4] Qui vale la convenzione: $R = +\infty \iff R^{-1} = 0$, $R = 0 \iff R^{-1} = +\infty$.
[5] Se $x = x_0$, la (4) è la serie banale con un solo termine dato da a_0 (e quindi, "converge" banalmente).
[6] Con la solita convenzione che $s^{-1} = +\infty$ se $s = 0$ e $s^{-1} = 0$ se $s = +\infty$.

Regolarità delle serie di potenze

Le serie di potenze (4) definiscono una funzione $f(z)$ per z nel disco di convergenza $\{z|\,|z-z_0|<R\}$ dove R è il raggio di convergenza della serie. Il contenuto della prossima proposizione è che f *è olomorfa sul disco di convergenza* e che la sua derivata è una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza: ma questo significa che una serie di potenze è derivabile in senso complesso infinite volte.

Proposizione 7 *Sia $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Allora f è olomorfa su $\{|z-z_0| < R\}$*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\,(n+1)(z-z_0)^n\,. \tag{7}$$

Dimostrazione A meno di una traslazione nelle z possiamo assumere che $z_0 = 0$, nel qual caso la (7) diviene

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\,(n+1)\,z^n\,. \tag{8}$$

Innanzitutto osserviamo che, poiché $\lim n^{1/n} = 1$, dal Lemma 3–(iii) segue che la serie di potenze in (8) ha raggio di convergenza[7] R.
Fissiamo $z \in D_R := \{|z| < R\}$ e sia r tale che $|z| < r < R$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché la serie $\sum |a_n| n r^{n-1}$ converge, esiste N tale che

$$\sum_{n>N} |a_n| n r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{9}$$

Sia

$$S_h := \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1}\Big)$$

e si osservi che $\lim_{h\to 0} S_h = 0$. Dunque, esiste $0 < \delta < r - |z|$ tale che, per ogni $0 < |h| < \delta$, $|S_h| < \varepsilon/2$. Per la formula della differenza di potenze si ha che

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \sum_{j=0}^{n-1} (z+h)^{n-1-j} z^j\,. \tag{10}$$

Dunque, se se $0 < |h| < \delta < r - |z|$, si ha

$$\Big|\frac{(z+h)^n - z^n}{h}\Big| \le \sum_{j=0}^{n-1} |z+h|^{n-1-j} |z|^j < n r^{n-1}\,. \tag{11}$$

[7] Ovviamente, i raggi di convergenza di $\sum a_n z^n$ e $z^k \sum a_n z^n = \sum a_n z^{n+k}$ sono gli stessi per ogni k fissato.

Quindi,

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\Big| &= \Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\Big)\Big| \\
&\le |S_h| + \sum_{n>N}^{\infty} \Big|a_n\Big(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\Big)\Big| \\
&\overset{(11)}{\le} |S_h| + \sum_{n>N}^{\infty} 2n|a_n| r^{n-1} \\
&\overset{(9)}{\le} |S_h| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Come conseguenza della Proposizione 7 possiamo calcolare facilmente le primitive di una serie di potenze:

Corollario 8 *Sia $f(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Allora, la serie di potenze $F(z) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(z-z_0)^n$ ha raggio di convergenza R e soddisfa $F' = f$ sul dominio di convergenza e $F(z_0) = 0$.*

Dimostrazione Poiché $n^{1/n} \to 1$, il raggio di convergenza di F è R e chiaramente $F(z_0) = 0$. Per la Proposizione 7, F è derivabile e la sua derivata coincide con f (sul dominio di convergenza). $\blacksquare$

Facciamo alcuni esempi. Consideriamo le seguenti serie di "tipo esponenziale":

$$\begin{gathered}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.
\end{gathered} \tag{12}$$

Dal criterio del rapporto (applicato alle serie dei moduli) segue, come nel caso reale, che le serie convergono su tutto $\mathbb{C}$ (ossia, il loro raggio di convergenza è $+\infty$). È dunque naturale chiamare le funzioni "intere" (ossia da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$) a cui queste serie convergono, rispettivamente,

$$\exp z\,, \qquad \cos z\,, \qquad \operatorname{sen} z\,, \qquad \cosh z\,, \quad \operatorname{senh} z\,. \tag{13}$$

Naturalmente, i nomi non sono casuali: queste serie sono infatti le *estensioni al campo complesso* delle funzioni analitiche elementari omonime definite su $\mathbb{R}$, i cui sviluppi in serie di Taylor in 0 sono gli stessi di quelli elencati in[8] (12); in altri termini, se $z = x \in \mathbb{R}$, $\exp z = e^x$, $\cos z = \cos x$, etc.

[8] Si ricordi che, per $x \in \mathbb{R}$, $\exp x = e^x$, dove e è in numero di Eulero.

L'esponenziale complesso

Discutiamo un po' più approfonditamente la funzione $z \in \mathbb{C} \mapsto \exp z \in \mathbb{C}$. Innanzitutto, vale anche in $\mathbb{C}$ il fondamentale

Teorema 9 ("di addizione")

$$\exp(z+w) = \exp(z)\ \exp(w)\,, \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{C}\,. \tag{14}$$

Dimostrazione

$$\exp(z+w) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(z+w)^k}{k!}\,,$$

e, usando la formula del binomio di Newton (che vale inalterata in $\mathbb{C}$),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(z+w)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^j w^{k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \sum_{0\le j\le k\le n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{n-j} \frac{w^k}{k!} \\
&= \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} - \varepsilon_n \Big)
\end{aligned}$$

dove

$$\varepsilon_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{z^j}{j!} \ \sum_{k=n-j+1}^{n} \frac{w^k}{k!}\,. \tag{15}$$

Poiché

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} &= \Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \Big) \Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} \Big) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \exp(z)\exp(w)\,,
\end{aligned}$$

il teorema è conseguenza dal limite

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0\,. \tag{16}$$

Per dimostrare la (16), osserviamo dapprima che

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(1+1)^n}{(n+1)!} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!} \frac{1}{(n+1-j)!} ;$$

dunque per ogni coppia di interi non negativi la cui somma è $(n+1)$ si ha

$$\frac{1}{j!} \frac{1}{k!} \le \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} , \qquad \forall\, j, k \in \mathbb{N}_0 \text{ tali che } k + j = n + 1 . \tag{17}$$

Ora, se $R \ge \max\{|z|, |w|\}$, dalla (17), osservando che $j + k = n + 1$ nel termine di destra della (15), si ha che

$$|\varepsilon_n| \le R^{n+1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-j+1}^{n} \frac{1}{j!} \frac{1}{k!} \le \frac{(2R)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-j+1}^{n} 1 \le \frac{(2R)^{n+1}}{(n+1)!}\, n^2 ,$$

che, per n che tende a ∞, tende a zero. ∎

Segue ora facilmente che

$$\exp z = e^z := e^x e^{iy} := e^x (\cos y + i \,\mathrm{sen}\, y) , \qquad (x, y \in \mathbb{R}) . \tag{18}$$

Infatti, se $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, per il Teorema di addizione e per lo sviluppo in serie di Taylor di e^x in $x = 0$, si ha

$$\exp z = \exp(x + iy) = \exp x \cdot \exp(iy) = e^x \cdot \exp(iy) \tag{19}$$

ed inoltre, dalle espansioni in serie di Taylor (reali) del seno e coseno, segue che

$$\begin{aligned}
\exp^{iy} &:= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{0\le k\le \frac{n-1}{2}} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{0\le k\le \frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \Big) \\
&= \cos y + i \,\mathrm{sen}\, y =: e^{iy} .
\end{aligned}$$ ∎

Esercizi

Esercizio 1 Dimostrare che per ogni $z, w \in \mathbb{C}$, si ha $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$.

Esercizio 2 Sia $m \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ con $z \ne 0$ se $m < 0$, allora

$$\sum_{k=m}^{n} z^k = \frac{z^m - z^{n+1}}{1 - z} , \qquad \forall\, n \ge m ,$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} z^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} z^k = \frac{z^m}{1-z} , \qquad \text{se } |z| < 1 ,\ m \in \mathbb{Z}, \quad (z \ne 0 \text{ se } m < 0) .$$

Esercizio 3 Dimostrare che se $a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \to L \in \mathbb{R}^*$, allora $\overline{\lim}\, a_n = L$.

Esercizio 4 Sia $a_n = 1/2^n$ se n è pari e $a_n = 1/3^n$ se n è dispari. Dimostrare che non esiste $\lim a_n^{1/n}$ e che $\overline{\lim}\, a_n^{1/n} = 1/2$.

Esercizio 5 Sia $M = \overline{\lim}\, |a_n|$. Dimostrare che se $M < 1$, per ogni $0 < \theta < M$ esiste N tale che $\sum_{n \geq N} |a_n| \leq \theta^N/(1-\theta)$, mentre se $M > 1$ esistono infiniti a_n maggiori in valore assoluto di α^n, per un opportuno $\alpha > 1$, ossia, esiste una successione n_k strettamente crescente e a valori in $\mathbb{N}$ tale che $|a_{n_k}| \geq \alpha^{n_k}$ per ogni k.

Esercizio 6 **(Somma per parti)** Per $N \geq 2$, siano $b_1, ..., b_N$ e $a_1, ..., a_N$ numeri complessi dati e sia

$$B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k\,.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N B_N + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n\,. \tag{20}$$

Esercizio 7 Si dimostri il seguente **criterio di convergenza di Abel–Dirichlet**:
Sia $\{a_n\}$ una successione *decrescente* di numeri reali con $\lim a_n = 0$ e siano b_n numeri complessi tali che

$$\sup_n |B_n| < +\infty\,, \qquad \text{dove} \quad B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k\,. \tag{21}$$

Allora, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ è convergente. Inoltre, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})\, B_n$ è assolutamente convergente, e si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})\, B_n\,. \tag{22}$$

Esercizio 8 Sia $\{a_n\}$ una successione *decrescente* di numeri reali con $\lim a_n = 0$. Dimostrare che, per ogni $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la **serie di Fourier**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx}$$

converge ad una funzione periodica di periodo 2π su $\mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

Esercizio 9 Dimostrare le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
&\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,,\\
&\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\,, \qquad \operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\,,\\
&e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z\,,\\
&\cosh z = \cos iz\,, \qquad \operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen} iz\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 10 Dimostrare le seguenti formule di addizione valide per $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\cos(z + w) &= \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w\,.\\
\operatorname{sen}(z + w) &= \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z\,.
\end{aligned}$$